Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato XI

DOCENTE: PROF. PIERPAOLO ESPOSITO

TUTORI: A. MAZZOCCOLI, M. NANNI

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. Stabilire su che insieme è definita e continua (o prolungabile con continuità) la seguente funzione. Determinarne anche i limiti a $\pm\infty$.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\log|x|}{\log|x+1|}:$$

La funzione è definita per tutti gli $x \neq -2, -1, 0$ ed è continua sull'insieme di definizione. Il limite per x che tende a -2 non è finito, in quel punto $f(x)$ presenta una discontinuità di seconda specie:

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Lo stesso discorso vale per $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Per x che tende a -1 invece il limite di $f(x)$ vale 0, il che significa che in quel punto $f(x)$ presenta una discontinuità eliminabile e dunque è prolungabile con continuità. Infine:

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

ESERCIZIO 2. Studiare la continuità delle seguenti funzioni definite a tratti.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{a}{x}} & x < 0 \\ \dfrac{\log(1+x^b)}{xe^a} & x > 0 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

È evidente che il limite sinistro di $f(x)$ è finito solo se $a \geq 0$, vale 0 se $a > 0$, altrimenti se $a = 0$ vale 1. Allo stesso modo il limite destro di $f(x)$ nell'origine è finito solo se $b \geq 1$, vale 0 se $b > 1$ ma se $b = 1$ allora il limite varrebbe $e^{-a} \neq 0 \quad \forall a \geq 0$. Dunque per $a > 0$ e $b > 1$, $f(x)$ è prolungabile con continuità nell'origine, ponendo $f(0) = 0$. Infine se $b = 1$ e $a = 0$, $f(x)$ è prolungabile con continuità in 0 ponendo $f(0) = 1$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \arctan x & x \in (-\infty, -1] \\ [x] & x \in (-1, 1) \\ \sqrt{x-1} & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$g(x)$ presenta due discontinuità non eliminabili, di tipo salto in $x = -1$ e in $x = 0$. Dunque $g(x)$ non può mai essere continua su tutto $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. Calcolare i seguenti limiti.

$$\circ \lim_{x\to+\infty} x^2 \left[\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+1}} - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2x^2}{x^2+1}}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+1}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

$$\circ \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x-\log x} = \lim_{x\to 1} x\frac{x^{x-1}-1}{1-x-\log x} \approx \lim_{x\to 1} \frac{x^{x-1}-1}{1-x-\log\left[1+(x-1)\right]} \approx$$

$$\approx \lim_{x\to 1} \frac{e^{(x-1)\log x}-1}{1-x-(x-1)} \approx \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\log x}{-2(x-1)} = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{2}\log x = 0.$$

$$\circ \lim_{x\to 0} (\cos x)^{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} (1+(\cos x - 1))^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right]^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

<u>ESERCIZIO 4.</u> Discutere il comportamento della serie numerica al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha}{n^{\alpha+1}+1}$$

Applichiamo i limiti notevoli studiati:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha}{n^{\alpha+1}+1} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3\alpha+1}}$$

Per confronto con la serie armonica generalizzata la serie converge solo se $\alpha > 0$.

<u>ESERCIZIO 5.</u> Discutere il comportamento delle seguenti successioni definite per ricorrenza.

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2+6}{5}$$

La successione è strettamente crescente e converge a 2.

$$a_1 = e, \qquad a_{n+1} = \frac{(\ln a_n)^2}{a_n}$$

Si verifica per induzione che $a_n = e$ se n è dispari, mentre $a_n = \frac{1}{e}$ se n è pari. Perciò la successione non ammette limite.

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$$

La successione a_n non ammette limite. Infatti, se a_n convergesse ad un numero reale α, avremmo $\alpha = \frac{(\alpha-1)}{\alpha}$. $\alpha = 0$ non è soluzione; se $\alpha \neq 0$, otteniamo l'equazione di secondo grado $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, che non ha soluzioni reali. Infine, se supponiamo $\alpha = \pm\infty$, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione:

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$$

otteniamo $\alpha = 1 - \frac{1}{\alpha}$ che è assurdo.